$\boxed{\text{Oef 12.6 theorie}}$ Simultaan diagonaliseren via orthogonale matrix kan gedaan worden volgens volgende stappenplan:

Zij $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$

en $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \vec{x} \mapsto B\vec{x}$

twee lineaire afbeeldingen die zelftoegevoegd zijn en commuteren (in andere woorden, A en B zijn commuterende reële symmetrische matrices) dan bestaat er wegens stelling 7.3.8 een orthogonale matrix M zodanig dat

$$M^t A M = D_1 \;,\; M^t B M = D_2$$

reële diagonaal matrices.

Om M te vinden gaan we te werk zoals in 12.5, maar moeten we nauwkeuriger zijn. ~~Om M op te stellen moeten we van B eigenvectoren vinden. Dit kan als volgt:~~

stap 1: vind de eigenwaarden van A:

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_e\}$$

~~berekenen~~

stap 2: Kies een eigenwaarde, bv. λ_1, en bereken een ONB $\mathcal{B}_1$ van de bijhorende eigenruimte V_{λ_1}. Volgens lemma 3.7.2 is

$$f(V_{\lambda_1}^{\perp}) \subseteq V_{\lambda_1}^{\perp}$$

en wegens het bewijs van stelling 3.7.3 is ook

$$g(V_{\lambda_1}) \subseteq V_{\lambda_1} \quad \text{en dus ook } g(V_{\lambda_1}^{\perp}) \subseteq V_{\lambda_1}^{\perp}$$

Dus als $\mathcal{B}_2$ een basis is van $V_{\lambda_1}^{\perp}$ dan hebben we:

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix} & C_1 \\ \hline \underbrace{O}_{\dim V_1 \text{ rijen}} & D_1 \end{array}\right) \text{ en } [g]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} E & C_2 \\ \hline \underbrace{O}_{\dim V_1 \text{ rijen}} & D_2 \end{array}\right)$$

waar $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Merk op dat E niet noodzakelijk diagonaal is want λ_1 is niet per se een eigenwaarde van g!

$\boxed{\text{oef 12.6, vervolg: theorie}}$

<u>stap 3</u>: we zullen een basis kiezen van V_{λ_1} zodat de matrix F ook diagonaal is. Hiervoor: bereken de eigenwaarden van B, zij $\{\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t\}$.

~~[illegible]~~

~~Vervolgens~~ Vervolgens, bereken een ONB van $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda'_1}$ en dan bereken $(V_{\lambda'_1})^\perp$. Hierna bereken een ONB van $V_{\lambda_1} \cap (V_{\lambda'_1})^\perp \cap V_{\lambda'_2}$. Daarna is $V_{\lambda_1} \cap (V_{\lambda'_1})^\perp \cap (V_{\lambda'_2})^\perp \cap (V_{\lambda'_3})$ aan de beurt, enz. Je stopt zodra je dim V_{λ_1} aan vectoren hebt gevonden. Noem deze basis B'_1. Indien B_2 een basis is van $(V_{\lambda_1})^\perp$ en $B' = B'_1 \cup B_2$, dan hebben we nu:

$$[f]_{B',B'} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix} & C_1 \\ \hline O & D_1 \end{array}\right)$$

$$\text{en } [g]_{B',B'} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda'_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda'_1 & & & \\ & & & \lambda'_2 & & \\ & & & & \lambda'_2 & \\ 0 & & & & & \ddots \end{matrix} & C_2 \\ \hline \underbrace{\qquad O \qquad}_{\text{dim } V_1 \text{ rijen}} & D_2 \end{array}\right)$$

(de linker bovenhoek wordt diagonaal omdat we nu ook eigenvectoren van B)

<u>merk op</u>: als dim $V_{\lambda_1} = 1$ en $\vec{v} \in V_{\lambda_1}$, dan $g(\vec{v}) = \alpha \vec{v}$ voor een getal $\alpha \in \mathbb{K}$. Dus $\vec{v}$ is reeds een eigenvector! Bijgevolg voor zo'n keuze van λ_1 moet je stap 3 <u>niet</u> doen.

ef 12.6 verwolg theorie

stap 4: nu willen we de basis B_2 van $V_{\lambda_1}^{\perp}$ speciaal kiezen. We zullen bijgevolg het idee van stap 2 en stap 3 herhalen voor $V_{\lambda_1}^{\perp}$:

(i) Kies een eigenwaarde λ_2 van A

(ii) Bereken een ONB van $(V_{\lambda_1}^{\perp}) \cap V_{\lambda_2}$

(iii) Indien dim $(V_{\lambda_1}^{\perp}) \cap V_{\lambda_2} > 1$, dan is deze basis niet noodzakelijk de juiste om ook B een stap verder te diagonaliseren. Bijgevolg moeten we weer een equivalent van stap 3 uitvoeren, dus:

bereken $(V_{\lambda_1})^{\perp} \cap V_{\lambda_2} \cap V_{\lambda_1'}$, etc.

Zodoende zal je tenslotte de nodige verzameling aan eigenvectoren vinden dat zowel A en B simultaan diagonaliseren en de kolommen van M bestaat uit deze vectoren.